ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1982

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

DEUXIEME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N.B. : Ce sujet comporte 2 pages de texte.

I

Pour tout nombre réel α vérifiant $\alpha > 0$, on donne l'équation différentielle

(1) $\qquad \alpha x(1 - x)y' + (1 - \alpha x)y = 1$.

1° - Quelles sont les séries entières solutions de (1) ? Quel est leur rayon de convergence ?

2° - Intégrer (1) pour $\alpha = \frac{1}{2}$. Quelle est celle des solutions trouvées qui est développable en série entière ?

II

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction de la variable réelle x définie par

$$f_n : x \longmapsto f_n(x) = \int_0^1 (1 - t^x)^n \, dt$$

f_0 désigne la fonction constante égale à 1 .

1° - Calculer $f_n(1)$.

2° - Quel est l'ensemble de définition de f_n ?

3° - Montrer que f_n est monotone sur $[\, 0 , +\infty [$. Quel est son sens de variation sur le reste de son ensemble de définition ?

4° - En développant $(1 - t^x)^n$, étudier la continuité et la dérivabilité de f_n . Calculer $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$. Calculer $f_n'(0)$.

5° - Représenter graphiquement f_1 , f_{2p+1} et f_{2p} pour $p > 0$.

III

1° - a) Trouver une relation de récurrence liant $f_n(x)$ à $f_{n-1}(x)$.

b) Calculer $f_n(\frac{1}{k})$ pour tout entier k strictement positif.

2° - a) Simplifier l'expression

$$F_n(x) = f_o(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) .$$

b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = f_n(x)$ pour les différentes valeurs de x . (On pourra dans certains cas majorer $F_n(x)$).

3° - On suppose dans cette question que x est choisi de façon à ce que la série de terme général u_n converge.

a) Si nu_n a une limite finie, quelle est cette limite ?

b) En utilisant $(n+1)xu_n - nxu_{n-1}$, calculer la somme de la série de terme général u_n .

4° - On suppose $x > 0$.

a) Donner une expression simple faisant intervenir u_n de la quantité

$$A_n = \sum_1^n \text{Log}(1 + \frac{1}{kx})$$

b) Trouver β , nombre réel positif tel que $n^\beta u_n$ ait une limite finie non nulle.
On rappelle, (il est inutile de le démontrer), que

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \text{Log } n$ tend vers une limite finie quand n tend vers l'infini.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail